Министерство образования Белгородской области
ОГАОУ ДПО «Белгородский институт развития образования»

БелИРО

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ ЗА 4 ШАГА

Учебно-методическое пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ

Областное государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Белгородский институт развития образования»
(ОГАОУ ДПО «БелИРО»)

Кафедра естественно-математического
и технологического образования

Готовимся к экзаменам. Математика

Решение тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ за 4 шага

Учебно-методическое пособие

Белгород
2023

ББК 74.262.6
Р 47

Печатается по решению редакционно-издательского совета
ОГАОУ ДПО «Белгородский институт образования»

Рецензенты:

Л.Н. Куртова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования НИУ «БелГУ»;

В.А. Есин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественно-математического и технологического образования ОГАОУ ДПО «БелИРО».

Автор-составитель:

Т.Д. Семенова, учитель математики областного государственного бюджетного образовательного учреждения «Борисовская средняя общеобразовательная школа имени Героя Советского Союза А.М. Рудова».

Р 47 **Решение тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ за 4 шага :** учебно-методическое пособие / ОГАОУ «БелИРО» ; отв. ред. Э. Н. Щербакова. – Белгород : ОГАОУ ДПО «БелИРО», 2023. – 47 с. – URL: https://beliro.ru/uploads/attachedfiles/7928/sbornik-trigonometricheskie-uravneniya-za-4-shaga_09-01-2024_10-20-58.pdf

В учебно-методическом пособии рассматривается методика решения тригонометрических уравнений. Содержательную основу пособия составляют типовые задания ЕГЭ, охватывающие применение основных формул тригонометрии, значений тригонометрических функций некоторых углов; этапы решения тригонометрических уравнений, представленных в открытом банке ЕГЭ.

Пособие поможет учителям сделать уроки математики интересными, позволит объяснить тему, чтобы было понятно любому обучающемуся.

Обучающиеся найдут ответы на непростые вопросы и отлично освоят приемы решения тригонометрических уравнений, которые позволят сэкономить время для решения заданий ЕГЭ с развернутым ответом.

ББК 74.262.6

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Единый государственный экзамен является одним из важных этапов в жизни выпускников одиннадцатого класса. Экзаменационные баллы играют ключевую роль при поступлении в высшие учебные заведения. В рамках данного экзамена одним из заданий является решение тригонометрических уравнений. Тригонометрия, как раздел математики, представляет собой достаточно сложный материал в школьном курсе «Алгебра и начала математического анализа». Для того, чтобы успешно справиться с заданиями, связанными с тригонометрическими уравнениями, необходимо запомнить множество формул, методов решения и подходов для отбора корней.

Готовность обучающегося к экзамену включает умение выполнять предложенные задания, умение выбирать подходящие задания, способность к самоконтролю, управление временем, психологическую устойчивость и способность концентрироваться. Тригонометрические уравнения всегда присутствовали среди заданий на экзамене, и процент успешного их выполнения составляет около 45%. Основные недостатки подготовки обучающихся при решении тригонометрических уравнений включают ошибки в формулах, не учитывается область определения, неправильное применение тригонометрических формул, незнание свойств тригонометрических функций, неумение отбирать корни, удовлетворяющие ограничениям и непонимание тригонометрической окружности.

Чтобы достичь безошибочного решения тригонометрических уравнений, необходимо решить большое количество задач, ознакомиться с различными методами и подходами. Задачей преподавателя является разработка системы работы и поиск дополнительных инструментов для облегчения обучения. Данное методическое пособие направлено на улучшение процесса обучения решению тригонометрических уравнений повышенной сложности для успешной сдачи единого государственного экзамена по математике. Цель пособия заключается в последовательной подготовке выпускников, которая основывается на разработке методов и приемов, основанных на выявлении особенностей решения тригонометрических уравнений.

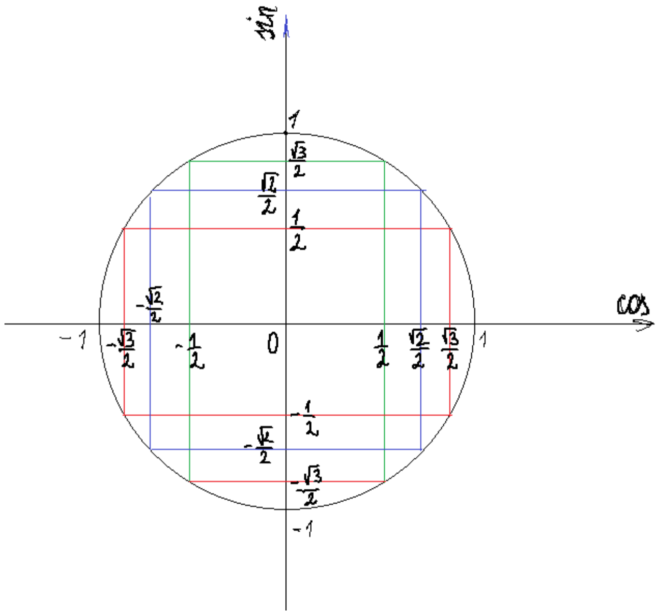
В учебно-методическом пособии представлены различные методы решения тригонометрических уравнений, которые помогут учащимся не тратить время и получить дополнительные баллы на экзамене. В сборнике представлено множество приемов, которые сделают уроки интересными и помогут понять тему легче и быстрее. В пособии также представлены QR-коды и ссылки на портал «Российская электронная школа», где обучающиеся смогут повторить забытые факты, а учителя – провести уроки повторения.

Также в пособии представлены шаблоны и классификация типичных тригонометрических уравнений с примерами решений. Пособие содержит задания повышенной сложности и предназначено для учителей математики общеобразовательных школ, а также для старшеклассников и студентов. Все уравнения, представленные в пособии, взяты из открытого сегмента банка заданий по математике для единого государственного экзамена.

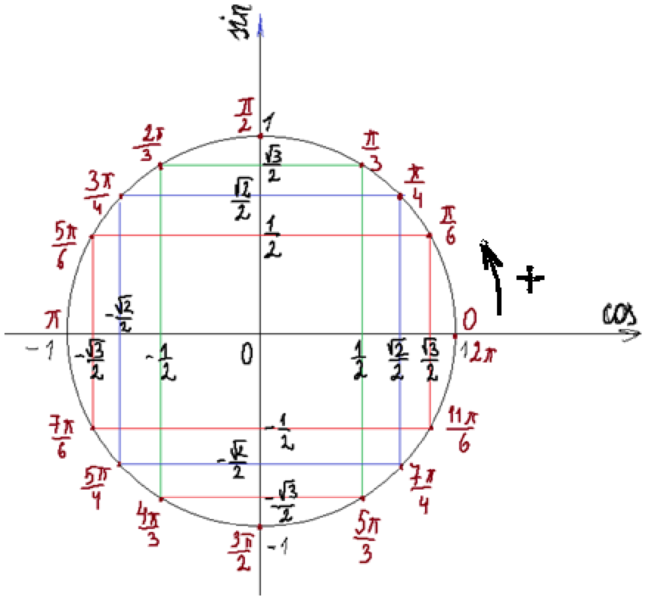
Учебно-методическое пособие соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта.

Понятие тригонометрического круга и принцип работы с ним

Для начала нужно знать, как располагаются оси. Значение косинуса – по горизонтали, синуса – по вертикали. Подробнее про синус, косинус и их значения.



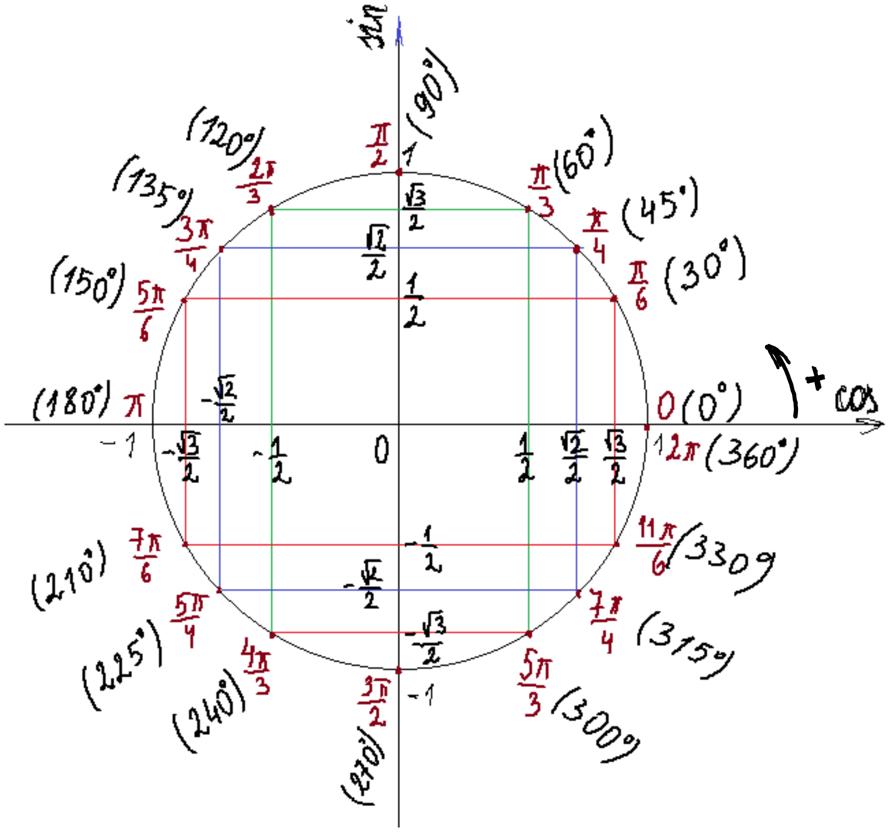
Окружность единичная. Значит, она пересекает оси синуса и косинуса в точках: -1; 1. В центре, как обычно, точка O (0; 0). Также на осях есть числа: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}.$ Запомнить их легко по порядку. В числите 1, 2, 3 под знаком корня, а в знаменателе всегда 2. Это значения синуса и косинуса некоторых углов.



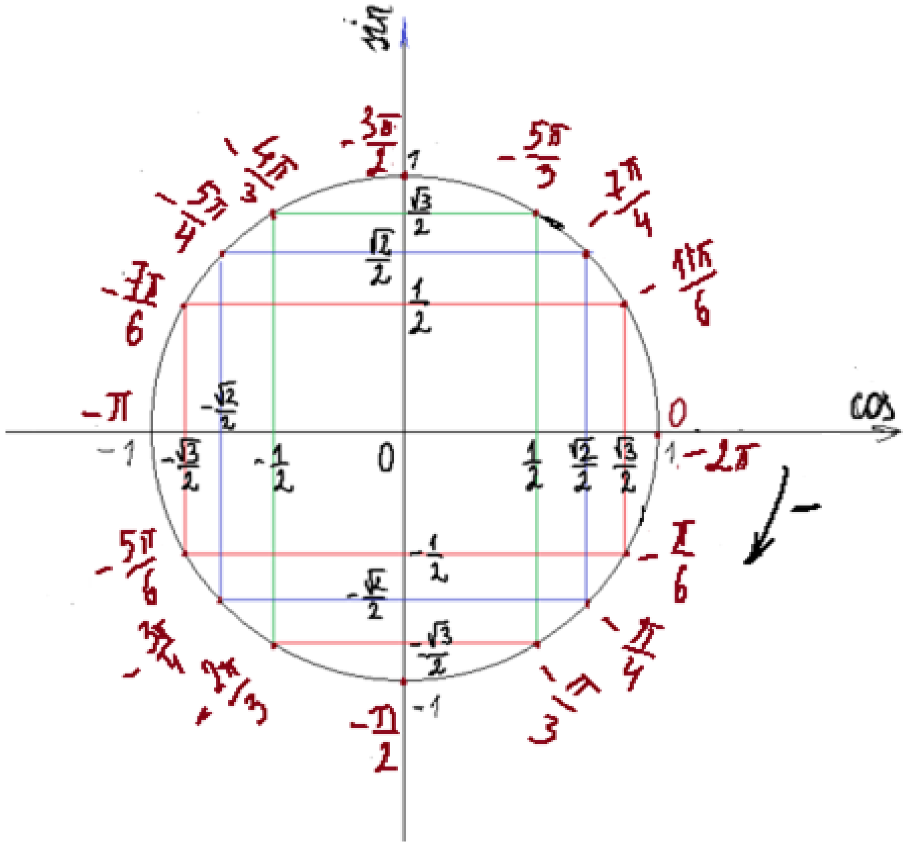
На окружности углы откладываются от самой правой точки. Это 0 радиан. Положительные углы откладываются в направлении против часовой стрелки.

Координата точки, соответствующей некоторому углу, по оси x – косинус угла, по оси y – синус угла.

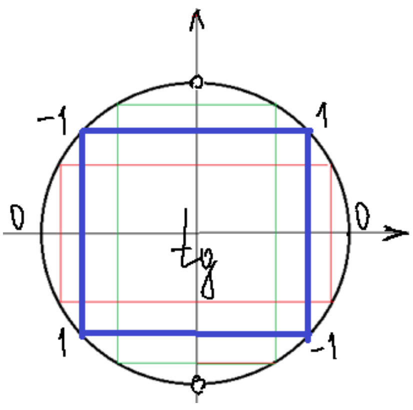
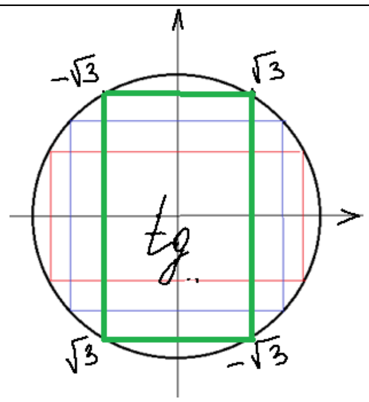
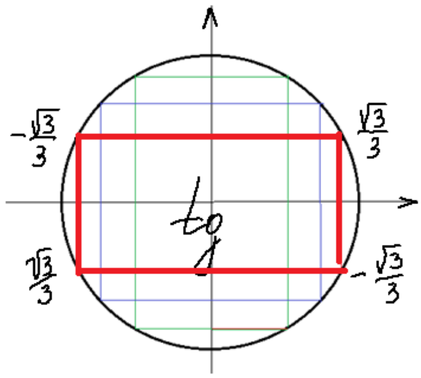
Углы могут быть заданы и в градусах.



Отрицательные углы откладываются в направлении по часовой стрелке.



Значение тангенса некоторых углов легко запомнить так:

<table>
<tr>
<td>Тангенс не существует в крайних верхней и нижней точке. Равен нулю в крайних правой и левой точках. В вершинах синего квадрата значения тангенса равны 1 и -1.</td>
<td>В вершинах зелёного вертикального прямоугольника значения тангенса равны $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$</td>
<td>В вершинах красного горизонтального прямоугольника значения тангенса равны $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

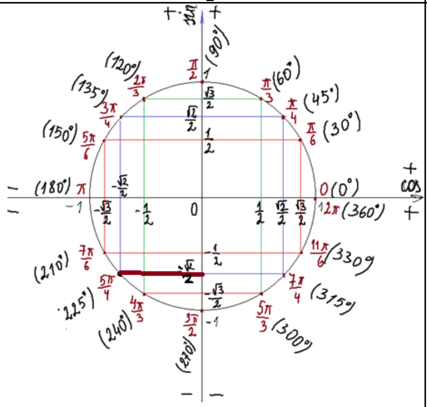
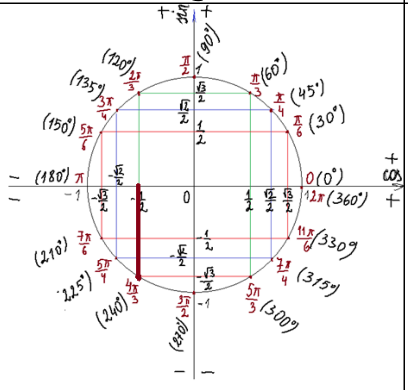
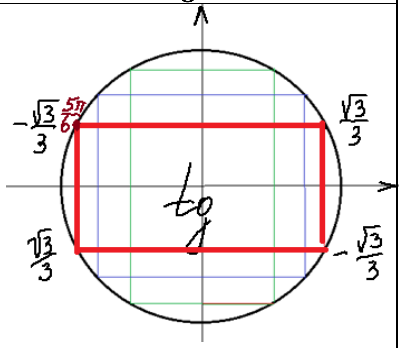
https://resh.edu.ru/subject/lesson/6019/start/199181

(Определение синуса, косинуса и тангенса угла)

https://resh.edu.ru/subject/lesson/4735/start/199274/

(Синус, косинус и тангенс аргументов α и $-\alpha$)

Примеры вычисления значений синуса и косинуса некоторых углов с помощью единичной окружности

$sin\frac{5\pi}{4} - ?$	$\cos\frac{4\pi}{3} - ?$	$tg\frac{5\pi}{6} - ?$
		
$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	$tg\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Подборка заданий на нахождение значений тригонометрических функций (для самостоятельного выполнения)

Вычислите:

1	$\sin\frac{\pi}{3}$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$tg\frac{\pi}{6}$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{3}$
3	$cos\frac{7\pi}{4}$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	$tg\frac{5\pi}{3}$	*Ответ:* $-\sqrt{3}$
5	$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6	$\cos\frac{3\pi}{2}$	*Ответ: 0*
7	$\sin\frac{3\pi}{2}$	*Ответ: -1*
8	$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	*Ответ: -1*

9	$\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$	*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$
10	$\sin\frac{7\pi}{6}$	*Ответ:* $-\frac{1}{2}$

Результаты экзамена участников в соответствии с их уровнем предметной подготовки

Современная модель ЕГЭ по математике профильного уровня выделяет по результатам экзамена 5 групп участников в соответствии с их уровнем предметной подготовки (таблица 1). Такая группировка обусловлена качественными различиями между уровнями подготовки участников экзамена. Разумеется, группировка условна, а границы групп нечёткие.

Таблица 1. Группы по уровню подготовки (ЕГЭ профильного уровня)

Группа	1 (минимальный)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повышенный)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0–5	6–9	10–13	14–22	14–22
Границы тестовых баллов	0–27	34–52	58–68	70–86	88–100

Задания части 2 предназначены для проверки математических знаний на уровне, необходимом для абитуриентов технических и математических специальностей. Традиционно в их число входит исследование функций, задачи по стереометрии, планиметрии, решение уравнений и неравенств, текстовая задача.

В вариантах ЕГЭ задача, где нужно решить тригонометрическое уравнение, состоит из двух пунктов. Первый пункт – решение самого уравнения. Второй – нахождение его корней на некотором отрезке.

Задание 13 из профильного ЕГЭ выполняют на 1 балл примерно половина участников.

Критерии оценивания задания 12 ЕГЭ:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта a и пункта *б*	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Под верными ответами подразумевается не просто написать слово «ответ» и числа, которые могут быть правильными, но и безошибочное, логически верное решение.

Основная идея решения тригонометрического уравнения – с помощью различных математических преобразований от данного уравнения перейти к простейшим тригонометрическим уравнениям, решения которых известны.

Алгоритм решения тригонометрического уравнения

- Исследовать ОДЗ.
- Привести углы к одинаковому виду.
- Привести функции к одному виду (если это возможно) или определить вид уравнения и способы его решения с разными функциями.
- Решить простейшие тригонометрические уравнения.

Отработка 1 шага алгоритма

1 шаг решения: определить, имеются ли в уравнении ограничения, накладываемые на переменную или функцию.

- если уравнение содержит дробь, то знаменатель не равен нулю.

Примеры нахождения значений переменной, при которых имеет смысл выражение

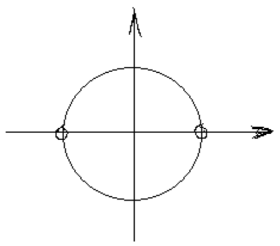
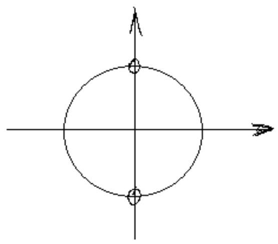
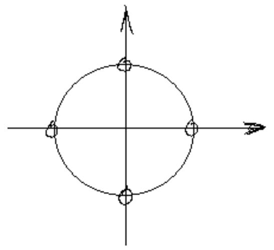
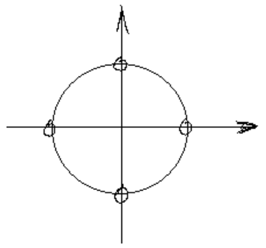
$\frac{x-9}{x-2}$	$\frac{5}{x^2-16}$	$\frac{3x-4}{x^2+4}$	$\frac{x^2}{x^2-8x+15}$
Знаменатель $x-2\neq 0$ $x\neq 2$	Знаменатель $x^2-16\neq 0$ $x^2\neq 16$ $x\neq -4$ и $x\neq 4$	Знаменатель $x^2+4\neq 0$ При любом значении x	Знаменатель $x^2-8x+15\neq 0$ $x_1\neq 3;\ x_2\neq 5$
Значения переменной $(-\infty;2)u(2;+\infty)$	Значения переменной $(-\infty;-4),(-4;4)$ $u\ (4;+\infty)$	Значения переменной $(-\infty;+\infty)$	Значения переменной $(-\infty;3),(3;5)\ u\ (5;+\infty)$

https://resh.edu.ru/subject/lesson/7244/main/303230/

(Числовое значение рационального выражения)

https://resh.edu.ru/subject/lesson/1261/

(Алгебраическая дробь. Допустимые значения переменных)

$\dfrac{\dots}{\sin x}$	$\dfrac{\dots}{\cos x}$	$\dfrac{\dots}{\operatorname{tg} x}$	$\dfrac{\dots}{\operatorname{ctg} x}$
 $\boldsymbol{\sin x \neq 0}$	 $\boldsymbol{\cos x \neq 0}$	 $\boldsymbol{tgx \neq 0}$	 $\boldsymbol{\operatorname{ctg} x \neq 0}$

Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой имеет смысл выражение (для самостоятельного выполнения)

При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1	$\dfrac{3x-2}{5x+3}$	*Ответ:* $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$ *и* $\left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$
2	$\dfrac{6}{x^2-49}$	*Ответ:* $(-\infty; -7)$, $(-7; 7)$ *и* $(7; +\infty)$
3	$\dfrac{5+6x}{2x-4}+\dfrac{2x-3}{7-x}$	*Ответ:* $(-\infty; 2), (2; 7)$ *и* $(7; +\infty)$
4	$\dfrac{3x+2}{x^2-x+1}$	*Ответ:* $(-\infty; +\infty)$
5	$\dfrac{x^3-x^2}{x^3-x}$	*Ответ:* $(-\infty; -1), (-1; 0), (0; 1)$ *и* $(1; +\infty)$

6	$\frac{1}{5-x} - \frac{1}{5+x}$	*Ответ:* $(-\infty;-5)$, $(-5;5)$ *и* $(5;+\infty)$
7	$\frac{6x^3}{25+x^2}$	*Ответ:* $(-\infty;+\infty)$
8	$\frac{9+5x}{x^2+6x-7}$	*Ответ:* $(-\infty;-7),(-7;1)$ *и* $(1;+\infty)$

- если уравнение содержит корень квадратный, то подкоренное выражение больше или равно нулю; если корень квадратный в знаменателе дроби, то подкоренное выражение строго больше нуля.

Подкоренное выражение может быть разным. Поставив ему условие, получаем неравенство: линейное, квадратное, дробно-рациональное, тригонометрическое и др.

https://resh.edu.ru/subject/lesson/2578/start/

(Решение неравенств с одной переменной)

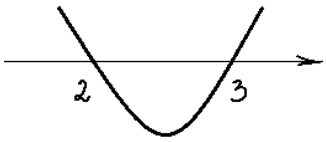
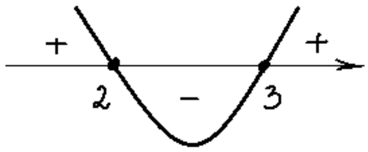
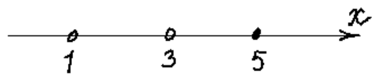
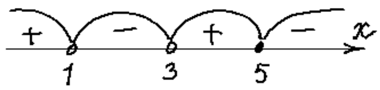
https://resh.edu.ru/subject/lesson/3118/start/

(Решение неравенств второй степени с одной переменной)

https://resh.edu.ru/subject/lesson/1996/start/

(Решение неравенств методом интервалов)

Примеры решения неравенств

<table>
<tr><td>Линейное</td><td>Квадратное</td><td>Дробно-рациональное</td></tr>
<tr>
<td>$6x + 3 \geq 0$
Решается переносом слагаемых с переменной влево, без переменной – вправо.
$6x \geq -3$
$x \geq -\frac{3}{6}$
$x \geq -0{,}5$</td>
<td>$x^2 - 5x + 6 \geq 0$
Решить квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Схематично изобразить график квадратичной функции (параболу)

Определить вид точек и знаки в каждом промежутке

Выбрать нужные промежутки, соответствующие знаку неравенства</td>
<td>$\frac{5 - x}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$
Решить неравенство методом интервалов.
Найти нули числителя и знаменателя: нуль числителя $x = 5$ (закрашенная точка). Нули знаменателя: $x = 1$; $x = 3$ (выколотые точки независимо от знака неравенства). Отметить полученные точки на координатной прямой

Определить знак в каждом промежутке

Выбрать нужные промежутки, соответствующие знаку неравенства</td>
</tr>
<tr><td>Ответ: $[-0{,}5; +\infty)$</td><td>Ответ: $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$</td><td>Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; 5]$</td></tr>
</table>

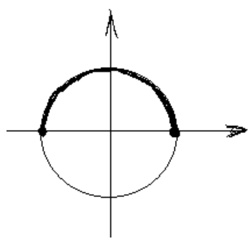
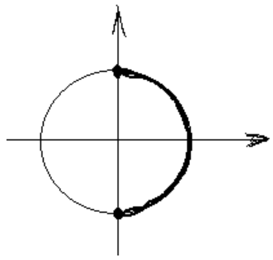
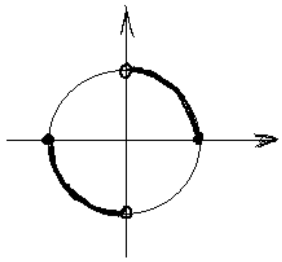
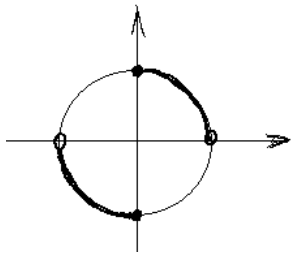
Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой имеет смысл выражение (для самостоятельного выполнения)

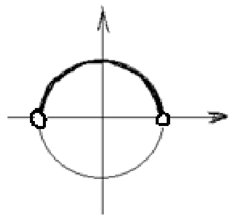
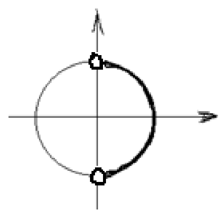
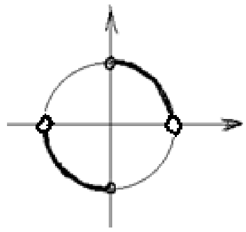
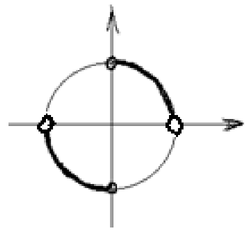
При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1	$\sqrt{x - 7}$	*Ответ:* $[7; +\infty)$
2	$\sqrt{x^2 + 4x - 21}$	*Ответ:* $(-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$
3	$\sqrt{-x^2 + 4x + 45}$	*Ответ:* $[-5; 9]$
4	$\frac{10}{\sqrt{-x - 1}}$	*Ответ:* $(-\infty; -1)$
5	$\frac{2}{\sqrt{12 + 4x - x^2}}$	*Ответ:* $(-2; 6)$

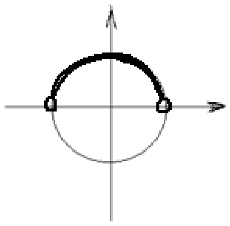
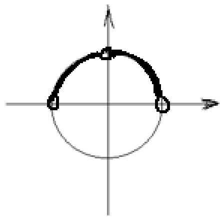
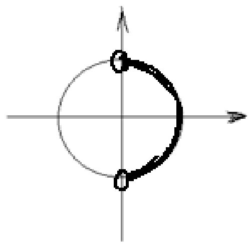
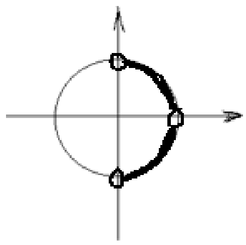
6	$\dfrac{x^2+x-30}{x+5}$	*Ответ:* $(-\infty, -6] \cup [5; +\infty)$
7	$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	*Ответ:* $[0; 1]$
8	$\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$	*Ответ:* $[-3; 3) \cup (3; +\infty)$
9	$\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$	*Ответ:* $(-2; 2)u\ [4; +\infty)$

Если под квадратным корнем тригонометрическое выражение, то решения неравенства целесообразно показать на тригонометрическом круге, показав тем самым, при каких значениях переменной имеет смысл выражение.

………$\sqrt{\sin x}$	…………$\sqrt{\cos x}$	………..$\sqrt{\operatorname{tg} x}$	………..$\sqrt{\operatorname{ctg} x}$
 $\mathbf{\sin x \geq 0}$	 $\mathbf{\cos x \geq 0}$	 $\mathbf{\operatorname{tg} x \geq 0}$	 $\mathbf{\operatorname{ctg} x \geq 0}$

$\dfrac{\dots\dots}{\sqrt{\sin x}}$	$\dfrac{\dots\dots}{\sqrt{\cos x}}$	$\dfrac{\dots\dots}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$	$\dfrac{\dots\dots}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$
 $\mathbf{\sin x > 0}$	 $\mathbf{\cos x > 0}$	 $\mathbf{\operatorname{tg} x > 0}$	 $\mathbf{\operatorname{ctg} x > 0}$

- если уравнение содержит логарифм, то подлогарифмическое выражение больше нуля;
- если уравнение содержит tg *x*, то он не существует в точках $\frac{\pi}{2}$ +2πn и $\frac{3\pi}{2}$ + 2πn, n∈Z.

……..$\log_a(\sin x)$	$\frac{\dots\dots}{\log_a(\sin x)}$	……….$\log_a(\cos x)$	$\frac{\dots\dots}{\log_a(\cos x)}$
 $\mathbf{\sin x > 0}$	 $\begin{cases}\mathbf{\sin x > 0}\\ \mathbf{\sin x \neq 1}\end{cases}$	 $\mathbf{\cos x > 0}$	 $\begin{cases}\mathbf{\cos x > 0}\\ \mathbf{\cos x \neq 1}\end{cases}$

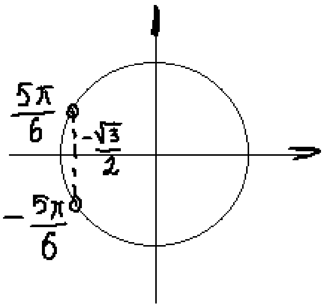
Примеры решения тригонометрических уравнений с ОДЗ из открытого банка заданий (ограничения для переменной)

1) $\mathbf{\frac{2\sin x-1}{2\cos x+\sqrt{3}} = 0}$

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, значит знаменатель не должен обратиться в нуль. Поставим ограничение $2\cos x + \sqrt{3} \neq 0$.

$2\cos x \neq -\sqrt{3}$; $\cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

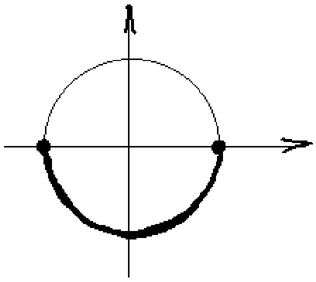
При дальнейшем решении уравнения исключим семейства $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n\epsilon Z$ из возможных ответов.



2) $\mathbf{\left(2\cos x + \sqrt{3}\right)\sqrt{-\sin x} = 0}$

Левая часть уравнения содержит корень квадратный, значит подкоренному выражению поставим условие: $-\sin x \geq 0$; $\sin x \leq 0$

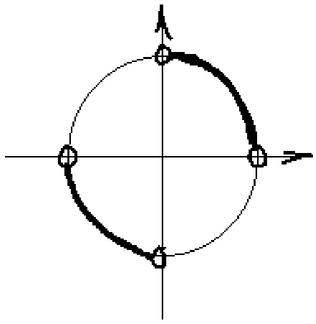
При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.



3) $\mathbf{(2\sin x - 1)\log_6(\mathrm{tg}\, x) = 0}$

Левая часть уравнения содержит логарифм, значит подлогарифмическому выражению поставим условие: $tgx > 0$

При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.

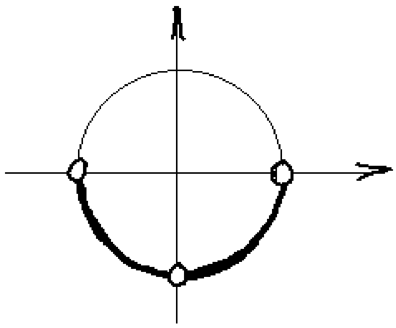


4) $\mathbf{\frac{2\cos x+1}{\log_2(-\sin x)} = 0}$

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, значит знаменатель не должен обратиться в нуль. Поставим ограничение $\log_2(-\sin x) \neq 0$; $-\sin x \neq 1$; $\sin x \neq -1$.

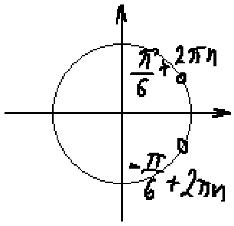
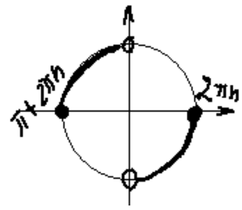
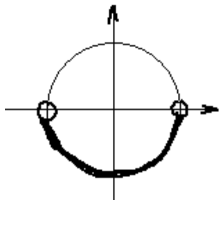
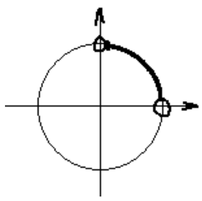
Левая часть уравнения содержит логарифм, значит подлогарифмическому выражению поставим условие: $-\sin x > 0$; $\sin x < 0$.

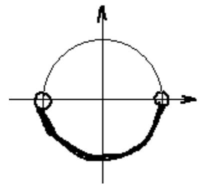
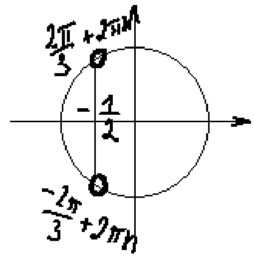
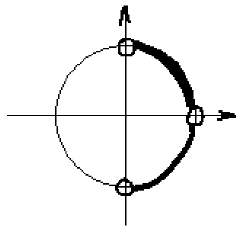
При дальнейшем решении уравнения в ответ выпишем только те семейства корней, которые принадлежат выделенной части окружности.



Подборка заданий на нахождение значений переменной, при которой имеет смысл уравнение (для самостоятельного выполнения)

При каких значениях переменной имеет смысл уравнение. Проиллюстрируйте на тригонометрической окружности.

1	$\dfrac{2\sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$	*Условие:* 
2	$\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\sqrt{-\operatorname{tg} x} = 0$	*Условие:* 
3	$\dfrac{\operatorname{ctg} x + 1}{\sqrt{-\sin x}} = 0$	*Условие:* 
4	$\log_7(\sin x) = \log_7(\cos x)$	*Условие:* 

5	$$\frac{2\cos x+1}{\log_2(-\sin x)}=0$$	*Условие:* 
6	$$\frac{2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x}{2\cos x+1}=0$$	*Условие:* 
7	$$\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\log_2(\cos x)}=0$$	*Условие:* 

Отработка 2 шага алгоритма

2 шаг решения: привести углы к одинаковому виду.
Необходимых формул по тригонометрии не так уж и много.
Чаще других встречаются такие сочетания углов:

1) Аргументы отличаются ровно в два раза.

<table>
<tr><td rowspan="6">1</td><td>x</td><td>$2x$</td></tr>
<tr><td>$\frac{x}{2}$</td><td>x</td></tr>
<tr><td>$2x$</td><td>$4x$</td></tr>
<tr><td>$x+\frac{\pi}{6}$</td><td>$2x+\frac{\pi}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Применяем формулы двойного угла:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$</td></tr>
</table>

https://resh.edu.ru/subject/lesson/3489/start/292739/
(Формулы двойного аргумента)

Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул двойного угла из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

1) $\mathbf{2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0}$

Применив формулу косинуса двойного аргумента

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получаем уравнение $2(2\cos^2 x - 1) + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$,

$$4\cos^2 x - 2 + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0,$$

$$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 9 = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

2) $\mathbf{\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x}$

Применив формулу синуса двойного аргумента $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, получаем уравнение $\cos^2 x - \frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x + \cos x - \sin x = 0$,

$$\cos^2 x - \sin x\cos x + \cos x - \sin x = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение решается способом разложения на множители левой части уравнения.

$$\cos x(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + 1) = 0.$$

Каждый множитель приравнивается к нулю и уравнение распадается на два.

3) $\mathbf{\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}}$

Легко заметить, что $2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + \frac{\pi}{3}$, применив формулу косинуса двойного аргумента $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получим уравнение

$$1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{5}{2} = 0,$$

$$-2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3}{2} = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

Подборка заданий на применение формул двойного угла (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

1	$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$	*Ответ:* $2\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$	*Ответ:* $\cos^2 \alpha$
3	$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$	*Ответ:* $\cos\alpha + \sin\alpha$
4	$\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}$	*Ответ: 2*
5	$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$	*Ответ: 1*
6	$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$	*Ответ: 1*
7	$\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$	*Ответ:* $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$
8	$\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$	*Ответ:* $2\sin\alpha$
9	$\frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha}$	*Ответ:* $\operatorname{tg}\alpha$

2) Аргументы отличаются знаком.

<table>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>x</td><td>-x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Применяем чётность (нечётность) тригонометрических функций:
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $tg(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$</td></tr>
</table>

https://resh.edu.ru/subject/lesson/3923/start/200607/
(Чётность и нечётность тригонометрических функций)

Примеры решения тригонометрических уравнений с применением чётности и нечётности тригонометрических функций из открытого банка заданий

1) $\mathbf{\cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0}$

Синус нечётная функция, поэтому $\sin(-x) = -\sin x$. Получаем уравнение $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$.

Применив формулу косинуса двойного аргумента

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получаем уравнение $1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$,

$$-2\sin^2 x - \sin x = 0,$$

$$2\sin^2 x + \sin x = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение $\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$, которое распадётся на два простейших уравнения.

2) $\mathbf{2\sin 2x + 2\sin(-x) - 2\cos(-x) + 1 = 0}$

Синус нечётная функция, поэтому $\sin(-x) = -\sin x$. Косинус чётная функция, поэтому $\cos(-x) = \cos x$. Получаем уравнение

$$2\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Применив формулу синуса двойного аргумента $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, получаем уравнение $2 \cdot 2\sin x\cos x - 2\sin x - 2\cos x + 1 = 0$,

$$4\sin x\cos x - 2\sin x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Это тригонометрическое уравнение решается способом разложения на множители левой части уравнения.

$$2\sin x\,(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0,$$

$$(2\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0.$$

Каждый множитель приравнивается к нулю и уравнение распадается на два.

Подборка заданий на применение чётности и нечётности тригонометрических функций (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

1	$\dfrac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2(-t)} + \operatorname{tg}(-t)\cdot\operatorname{ctg}(-t)$	*Ответ:* $\frac{1}{\cos^2 t}$
2	$\dfrac{\sin^2 t + \cos^2(-t)}{\operatorname{tg}^2(-t)\cos^2 t} - \dfrac{\cos^2 t}{1-\cos^2(-t)}$	*Ответ: 1*
3	$\dfrac{\cos^2 t}{1+\sin(-t)} - \sin^2(-t) - \cos^2 t$	*Ответ:* $\sin t$
4	$\dfrac{\sin^2(-t)}{1+\cos(-t)} - \sin(-t)\cdot\operatorname{ctg} t$	*Ответ: 1*

3) Аргументы представлены в виде суммы или разности, одно из слагаемых угол, не лежащий на осях.

3	x	$\frac{\pi}{3}+x$
	x	$x-\frac{\pi}{6}$
	x	$x+\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
	Применяем формулы суммы или разности углов: $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$; $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	

https://resh.edu.ru/subject/lesson/4734/train/199315/
(Формулы сложения)

Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул сложения из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

1. $\mathbf{2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x}$

Применив формулу синуса суммы двух аргументов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

получим

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x.$$

Получим уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) - \cos x = 0,$

$$2\sin^2 x + \sin x + \cos x - \cos x = 0,$$

$$2\sin^2 x + \sin x = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение $\sin x\,(2\sin x + 1) = 0,$ которое распадётся на два простейших уравнения.

2. $\mathbf{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x}$

Заметим, что $2x+\frac{\pi}{6} = x + \left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Перепишем уравнение в виде

$$\sin\left(x+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right) - \cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x = 0$$

Применив формулу синуса суммы двух аргументов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

получим

$$\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x = 0,$$

$$\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \cos x = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение

$$\cos x\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 1\right) = 0$$

которое распадётся на два простейших уравнения:

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0.$$

Подборка заданий на применение формул сложения (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

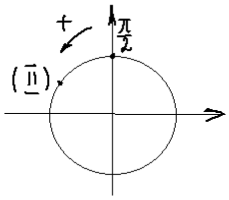
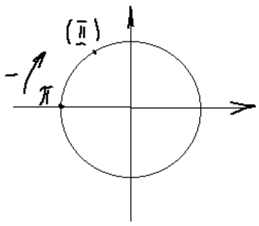
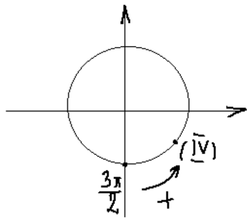
1	$\sin(30^0+\alpha) - \cos(60^0+\alpha)$	*Ответ:* $\sqrt{3}\sin\alpha$
2	$\sqrt{2}\sin(\alpha-45^0) - \sin\alpha + \cos\alpha$	*Ответ: 0*

3	$cos\frac{3\pi}{8}sin\frac{\pi}{8}-sin\frac{3\pi}{8}sin\frac{\pi}{8}$	*Ответ: 0*
4	$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$	*Ответ:* $-2\sin\alpha\sin\beta$
5	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$	*Ответ: 0*
6	$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$	*Ответ: 1*
7	$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$	*Ответ: -1*
8	$\cos 36^0\cos 24^0-\sin 36^0\sin 24^0$	*Ответ:* $\frac{1}{2}$

4) Аргументы представлены в виде суммы или разности, одним из слагаемых которой является угол, лежащий на координатной оси: $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$; $\boldsymbol{\pi}$; $\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$; $\boldsymbol{2\pi}$.

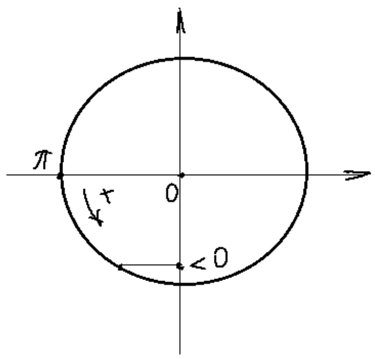
https://resh.edu.ru/subject/lesson/3490/start/199398/
(Формулы приведения)

<table>
<tr><td rowspan="5">4</td><td>x</td><td>$\frac{\pi}{2}+x$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$\pi-x$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$\frac{3\pi}{2}-x$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$2\pi-x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Применяем формулы приведения:
• если откладываем угол от вертикальной оси, то приводимая функция меняет название, если от горизонтальной – нет;
• если в скобках знак «+», то откладываем угол против часовой стрелки, если знак «-», то откладываем угол по часовой стрелке;
• знак новой функции совпадает со знаком приводимой функции.</td></tr>
</table>

	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$  $\frac{\pi}{2}$ на вертикальной оси, значит cos поменяется на sin, в скобках знак «+», значит откладываем угол против часовой стрелки, попали во вторую четверть. Во второй четверти $\cos x<0$, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$	$\sin(\pi-x)$  π на горизонтальной оси, следовательно, sin не поменяет название. В скобках знак «-», значит откладываем угол по часовой стрелке, попадём во вторую четверть. Во второй четверти $\sin x>0$, значит, $\sin(\pi-x)=\sin x$	$tg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$  $\frac{3\pi}{2}$ на вертикальной оси, следовательно, tg поменяется на ctg. В скобках знак «+», значит откладываем угол против часовой стрелки, попадём в четвёртую четверть. В четвёртой четверти $\operatorname{tg} x<0$, значит, $tg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg} x$

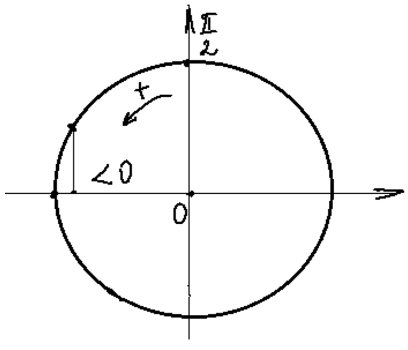
Примеры решения тригонометрических уравнений с применением формул приведения из открытого банка заданий (преобразование уравнений)

1) $\mathbf{2\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x}$



Преобразуем $\sin(\pi+x)$. В скобке дано $\pi+x$, значит синус не изменится. Теперь нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность. Находим π, нужно прибавить x, значит движемся против часовой стрелки, попадаем в 3 четверть, смотрим знак оси синусов, в данном случае синус отрицательный.

Записываем ответ $\sin(\pi+x)=-\sin x$.



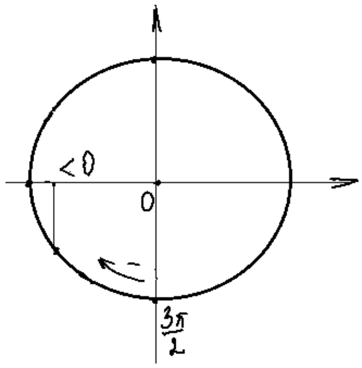
Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. В скобках дано $\frac{\pi}{2}+x$, значит косинус поменяется на синус. Теперь нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность. Находим $\frac{\pi}{2}$, нужно прибавить *x*, значит движемся против часовой стрелки, попадаем во вторую четверть. Смотрим знак оси косинусов, в данном случае косинус отрицательный. Записываем ответ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$.

Уравнение преобразуется $-2\sin x\cdot(-\sin x)=\sin x$,

$$2\sin^2 x-\sin x=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки, получим уравнение $\sin x\,(2\sin x-1)=0$, которое распадётся на два простейших уравнения.

2) $\boldsymbol{2\cos^2 x+1=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$



Преобразуем $\cos\left(\frac{3\Pi}{2}-x\right)$. В скобках дано $\frac{3\pi}{2}-x$, значит косинус поменяется на синус. Теперь нужно определиться со знаком ответа. Нарисуем схематично тригонометрическую окружность. Находим $\frac{3\pi}{2}$, нужно вычесть *x,* значит движемся по часовой стрелке, попадаем в третью четверть.

Смотрим знак оси косинусов, в данном случае косинус отрицательный. Записываем ответ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$.

Исходное уравнение запишется в виде $2\cos^2 x+1=-2\sqrt{2}\sin x$,

$$2\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin x+1=0.$$

Применив основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, получаем уравнение $2(1-\sin^2 x)+2\sqrt{2}\sin x+1=0$,

$$2-2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x+1=0,$$

$$-2\sin^2 x+2\sqrt{2}\sin x+3=0.$$

Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному.

Подборка заданий на применение формул приведения (для самостоятельного выполнения)

Упростите выражение:

1	$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$	*Ответ:* $-\frac{1}{2}$
2	$\dfrac{2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$	*Ответ:* -2
3	$tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)sin(2\pi-\alpha)$	*Ответ:* $\cos\alpha$

4	$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	*Ответ:* $-\cos\alpha$
5	$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$	*Ответ:* $\cos^2\alpha$
6	$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$	*Ответ:* $-\cos^2\alpha$
7	$\frac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$	*Ответ:* $-\frac{1}{2}$
8	$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\alpha}+\alpha\right)},\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$	*Ответ:* $\sin\alpha$

Отработка 3 шага алгоритма

3 шаг решения: привести функции к одному виду (если это возможно) или определить вид уравнения и способы его решения с разными функциями.

https://resh.edu.ru/subject/lesson/6314/start/199928/
(Тригонометрические уравнения)

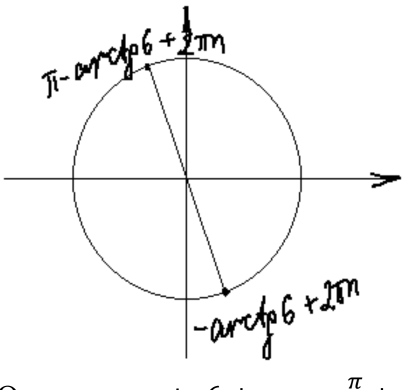
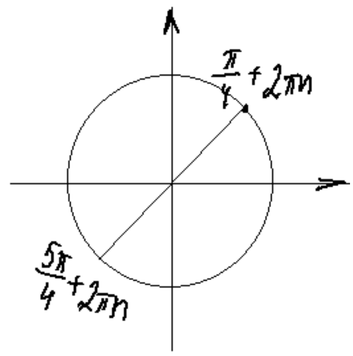
https://resh.edu.ru/subject/lesson/6320/start/200020/
(Методы решения тригонометрических уравнений)

https://resh.edu.ru/subject/lesson/6321/start/199989/
(Однородные тригонометрические уравнения)

Некоторые из методов (например, замена переменной или разложение на множители) являются универсальными, то есть применяются и в других разделах математики. Другие являются специфическими именно для тригонометрии.

Примеры решения тригонометрических уравнений с разными функциями из открытого банка ЕГЭ

Чаще всего встречающиеся комбинации:

1	В записи уравнения есть $\sin^2 x \pm \sin x \pm$ число
	Это тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному. Целесообразно введение новой переменной. **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.** $$\mathrm{tg}^2 x + 5\,\mathrm{tg}\, x - 6 = 0$$ Пусть $\mathrm{tg}\, x = t,$ тогда исходное уравнение перепишется в виде $t^2 + 5t - 6 = 0.$ Решаем любым способом квадратное уравнение. Получим корни $t_1 = -6;\ t_2 = 1.$ Обратная замена: $\mathrm{tg}\, x = -6$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\, x = 1$  Ответ: $-\mathrm{arctg}\, 6 + \pi n;$ $\quad \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $\quad n \in Z.$
2	В записи уравнения есть $\sin^2 x \pm \cos x \pm$ число
	По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ заменить функцию в квадрате $\sin^2\alpha = (1 - \cos^2\alpha)$. Новое уравнение с одноимённой функцией приведётся к квадратному. **Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.** $$8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$ $$8(1 - \cos^2 x) + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$ $$8 - 8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$ $$-8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 9 = 0$$

<table>
<tr><td></td><td>

$$8\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$$

Пусть $\cos x = t, \quad -1 \le t \le 1$. Тогда исходное уравнение перепишется в виде

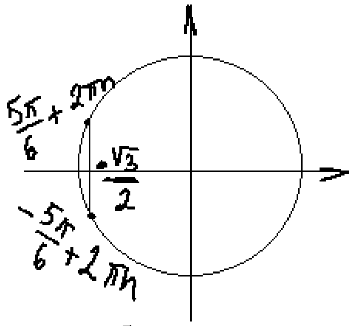
$$8t^2 - 2\sqrt{3}t - 9 = 0$$

$$D = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-9) = 12 + 288 = 300; \qquad \sqrt{D} = 10\sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 10\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = \frac{-8\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{3} + 10\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = \frac{12\sqrt{3}}{2 \cdot 8} = \frac{6\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \notin [-1; 1]$$

Обратная замена: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Ответ: $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \; n \epsilon Z$
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>В записи уравнения есть $a\sin x \pm b\cos x = 0$. Разные функции, обе в первой степени.</td></tr>
<tr><td></td><td>

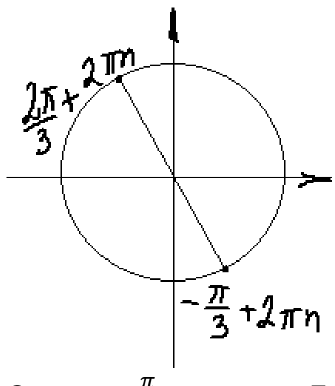
Это однородное уравнение первой степени. Решается путём деления на $\cos x \neq 0$. Преобразуется в простейшее уравнения первой степени с функцией $\operatorname{tg} x$

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \;/{:}\; \cos x \neq 0$$

$$tgx + \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$



Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n\epsilon Z$
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>В записи уравнения есть $\sin^2 x \pm \sin x \cos x \pm \cos^2 x$ + число</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

Это однородное уравнение второй степени. Решается путём деление на $\cos^2 x \neq 0$. Предварительно заменить число с помощью основного тригонометрического тождества на сумму $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Преобразуется в уравнение, приводимое к квадратному относительно $\operatorname{tg} x$

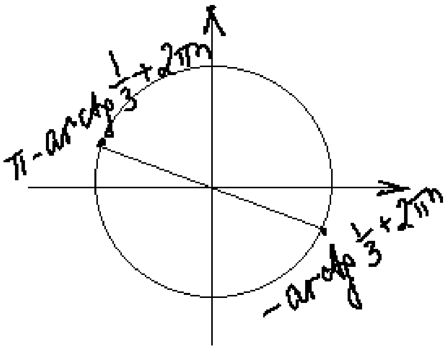
Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

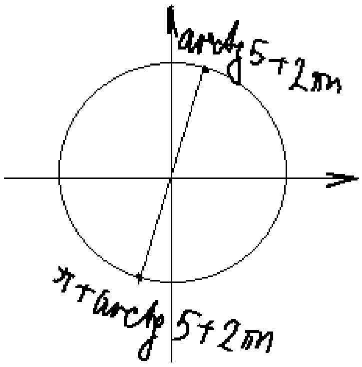
$$5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$$
$$5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$$
$$3\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0$$
$$3\operatorname{tg}^2 x - 14\operatorname{tg} x - 5 = 0$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда уравнение перепишется так $3t^2 - 14t - 5 = 0$

$$D = (-14)^2 - 4\cdot 3\cdot(-5) = 196 + 60 = 256, \quad \sqrt{256} = 16$$
$$t_1 = \frac{14-16}{2\cdot 3} = \frac{-2}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3}$$
$$t_2 = \frac{14+16}{2\cdot 3} = \frac{30}{2\cdot 3} = 5$$

Обратная замена $tgx = -\frac{1}{3}$ $\operatorname{tg} x = 5$





Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + \pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

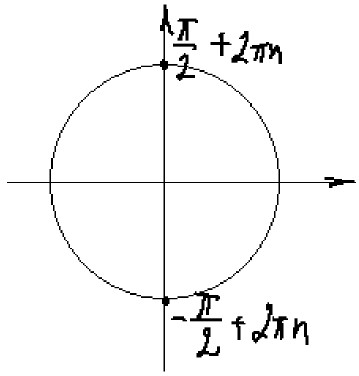
Во многих случаях уравнение удаётся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.

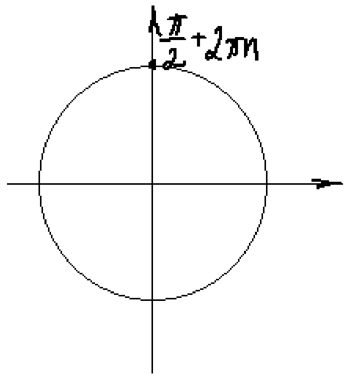
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Уравнение содержит $\sin x \pm \sin x\cos x = 0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
Это уравнение решается путём разложения левой части уравнения на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$\sin 2x - 2\cos x = 0$$
$$2\sin x \cos x - 2\cos x = 0$$
$$2\cos x\,(\sin x - 1) = 0$$
$$2\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \text{или} \sin x - 1 = 0$$
$$\cos x = O \qquad \sin x = 1$$

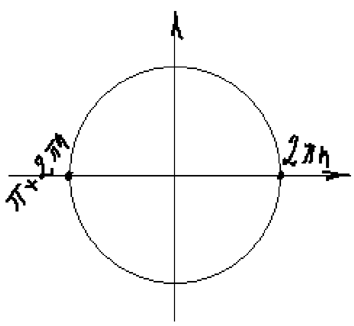


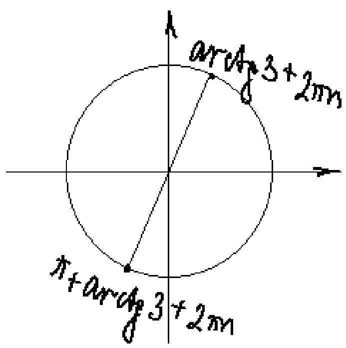


Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in Z$
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Уравнение содержит $\cos^2 x \pm \sin x \cos x = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>
Это уравнение решается путём разложения на множители левой части уравнения с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

$$\sin^2 x = 3\sin x \cos x$$
$$\sin^2 x - 3\sin x \cos x = 0$$
$$\sin x\,(\sin x - 3\cos x) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 3\cos x = 0/ : \cos x \neq 0$$
$$tgx - 3 = 0$$
$$\operatorname{tg} x = 3$$





Ответ: πn; $\quad \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \qquad n \in Z$
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Уравнение содержит четыре слагаемых $\cos^3 x \pm \cos^2 x \pm \cos x^{\pm}$ число = 0 или $\sin^2 x \pm \sin x \cos x \pm \sin x \pm \cos x = 0$</td></tr>
</table>

Это уравнение решается путём разложения на множители с помощью способа группировки.

Пример решения тригонометрического уравнения из открытого банка заданий.

1) $\mathbf{\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}}$

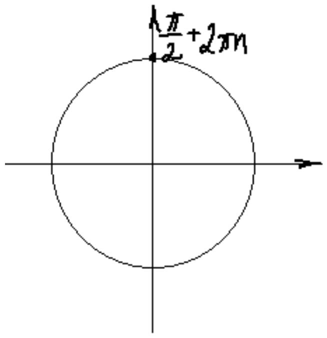
$2\,sin\,x\,cos\,x + \sqrt{2}\,sin\,x - 2\,cos\,x - \sqrt{2} = 0$

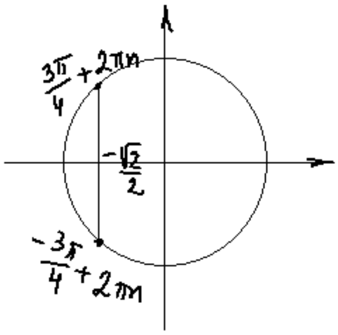
$2\cos x\,(\sin x - 1) + \sqrt{2}(\sin x - 1) = 0$

$(\sin x - 1)\big(2\cos x + \sqrt{2}\big) = 0$

$\sin x - 1 = 0$ или $2\cos x + \sqrt{2} = 0$

$\sin x = 1$ $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$





Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n\epsilon Z$

2) $\boldsymbol{cos^2 x - \frac{1}{2} sin\,2x + cos\,x = sin\,x}$

$\cos^2 x - \sin x \cos x + \cos x - \sin x = 0$

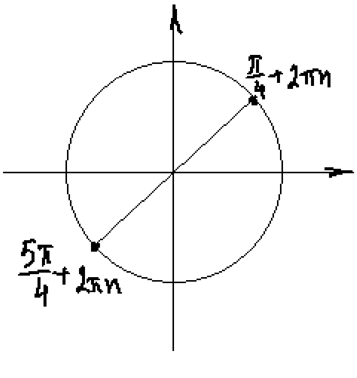
$\cos x\,(\cos x - \sin x) + (\cos x - \sin x) = 0$

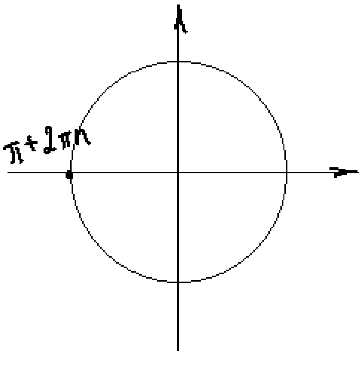
$(\cos x - \sin x)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$ или $\cos x + 1 = 0$

$1 - tgx = O$ $\cos x = -1$

$tgx = 1$





Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n;$ $\pi + 2\pi n,$ $n \in Z$

Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Определите, к какому виду относится тригонометрическое уравнение из предложенного алгоритма:

1	$\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$	*Ответ: 4*
2	$6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$	*Ответ: 2*
3	$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$	*Ответ: 6*
4	$6\cos x - 7\cos x - 5 = 0$	*Ответ: 1*
5	$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$	*Ответ: 3*
6	$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$	*Ответ: 7*
7	$\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$	*Ответ: 5*

Отработка 4 шага алгоритма

4 шаг решения: получить одно, два или три простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a,$ $\cos x = a,$ $\operatorname{tg} x = a.$

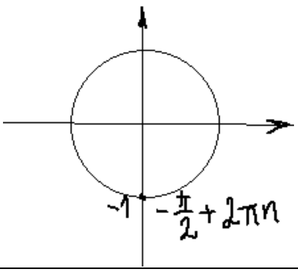
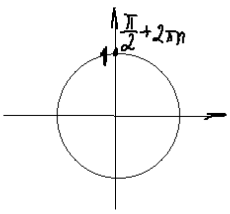
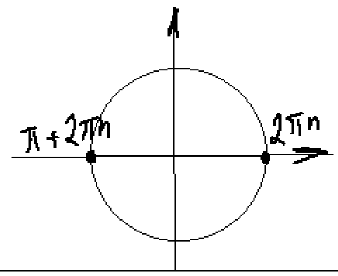
Каждое из этих уравнений легко решается с помощью единичной окружности, на которой изображаются соответствующие точки, после чего с учетом периодичности тригонометрических функций записывается ответ. С определенной степенью условности любое стандартное тригонометрическое уравнение («стандартное» не обязательно означает «простое») можно отнести к одному из двух основных типов: уравнения, сводимые к простейшим с помощью тех или иных тригонометрических преобразований и уравнения, вначале сводимые к алгебраическим с помощью той или иной замены переменной, а затем с помощью обратной замены приводимые к одному или нескольким простейшим.

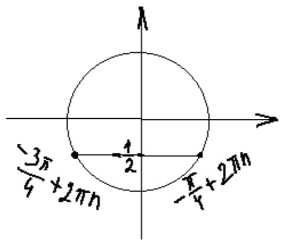
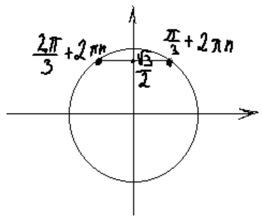
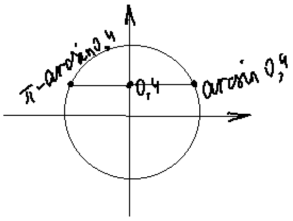
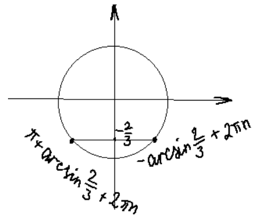
Примеры решения простейших тригонометрических уравнений с помощью единичной окружности

$$\boldsymbol{\sin x = a}; \qquad \boldsymbol{-1 \le a \le 1}$$

https://resh.edu.ru/subject/lesson/4736/start/199743/
(Уравнение $\sin x = a$)

$\sin x = -\sqrt{3}$	Т.к. $-1 \le \sin x \le 1$ следовательно, корней нет

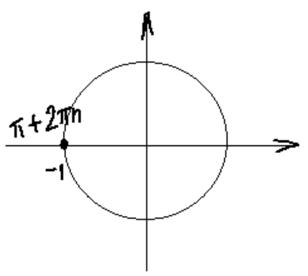
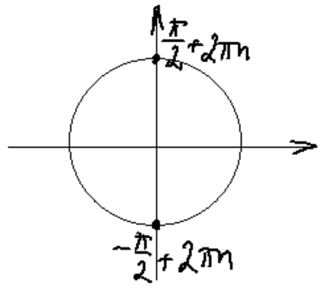
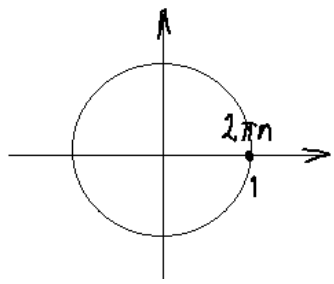
$\sin x = -1$	$\sin x = 1$	$\sin x = 0$
		
Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$	Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	Ответ: $\pi n, \quad n \in \mathrm{Z}$

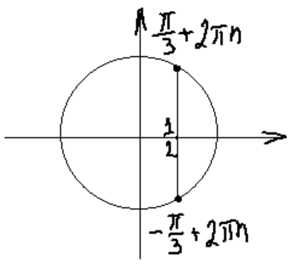
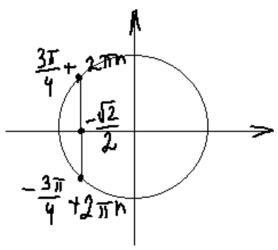
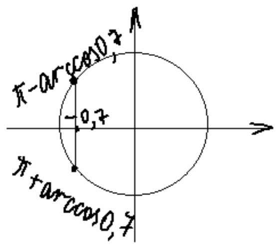
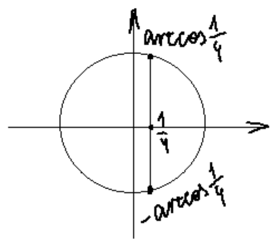
$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin x = 0{,}4$	$\sin x = -\frac{2}{3}$
			
Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;$ $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \qquad n \epsilon Z$	Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n;$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$	Ответ: $arc\sin 0.4 + 2\pi n; \ \pi - \arcsin 0.4 + 2\pi n, \ \ n \in Z$	Ответ: $\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n; \ \pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z$

$\cos x = a, \qquad -1 \leq a \leq 1$

https://resh.edu.ru/subject/lesson/6317/start/199681/
(Уравнение $\cos x = a$)

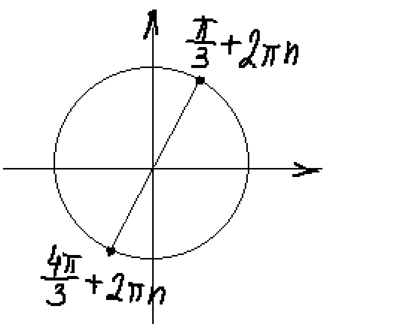
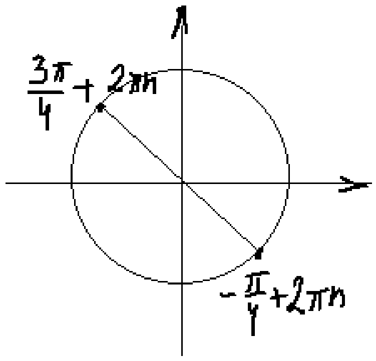
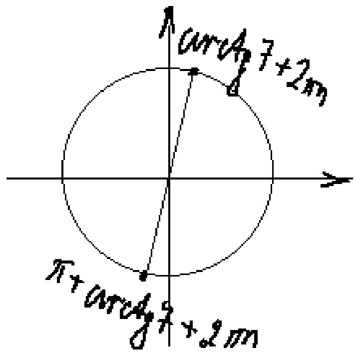
$\cos x = 1{,}3$	Т.к. $-1 \leq \cos x \leq 1$ следовательно, корней нет

$\cos x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
		
Ответ: $\pi + 2\pi n, \quad n \in Z$	Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$	Ответ: $2\pi n, \quad n \in Z$

$\cos x = \frac{1}{2}$	$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = -0{,}7$	$\cos x = \frac{1}{4}$
			
Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \epsilon Z$	Ответ: $\pm\frac{3\Pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$	Ответ: $\pi \pm \arccos 0{,}7 + 2\pi n, n \in Z$	Ответ: $\pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, \quad n \epsilon Z$

$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$

https://resh.edu.ru/subject/lesson/4737/start/199804/
(Уравнение $\operatorname{tg} x = a$)

<table>
<tr><td>$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$</td><td>$\operatorname{tg} x = -1$</td><td>$tgx = 7$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,$
$n \in Z$
или $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in Z$</td><td>Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$
$n\epsilon Z$
или $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon Z$</td><td>Ответ: $ar\,\mathrm{ctg}\,7 + 2\pi n;$
$\pi + ar\,\mathrm{ctg}\,7 + 2\pi n, n \in Z$
или $\mathrm{arctg}\,7 + \pi n,\ n \in Z$</td></tr>
</table>

Подборка заданий на решение простейших тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Решите уравнения:

1	$\cos x = \frac{1}{2}$	*Ответ:* $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n\epsilon Z$
2	$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	*Ответ:* $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n;\ \ \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
3	$tgx = -1$	*Ответ:* $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \ \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
4	$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	*Ответ:* $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in z$
5	$\sin x = -\frac{1}{3}$	*Ответ:* $-arc\,\sin\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$

6	$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$	*Ответ: корней нет*
7	$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$	*Ответ:* $\pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} + 2\pi n, \ \ n \epsilon Z$
8	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	*Ответ:* $\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \ \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$

Примеры решения тригонометрических уравнений из открытого банка ФИПИ

Курсивом выделены устные рассуждения, необязательные для записи решения.

1) Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$

<table>
<tr>
<td colspan="2">

$$\frac{\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$$

Выполняем 1 шаг алгоритма.

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, следовательно знаменатель дроби не может обратиться в 0.

В записи уравнения есть tg, *а* tg *не существует в точках* $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in z$, *выкалываем верхнюю и нижнюю точки окружности*

Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нет.

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$

Выполняем 2 шаг алгоритма.

Приводим углы к одинаковому виду x.

$cos\ 2x = cos^2 x - sin^2 x;$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$

Выполняем 3 шаг алгоритма.

Заменим по основному тригонометрическому тождеству $cos^2 x = 1 - sin^2 x$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

Вынесем $sin\,x$ *за скобки как общий множитель*

$$\sin x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$$

Каждый множитель приравняем к нулю

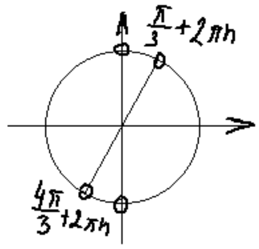
Выполняем 4 шаг алгоритма.

</td>
<td>

Условие:

$$tgx - \sqrt{3} \neq 0$$

$$\operatorname{tg} x \neq \sqrt{3}$$



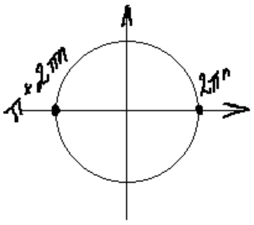
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$\sin x = 0$$

</td>
<td colspan="2">

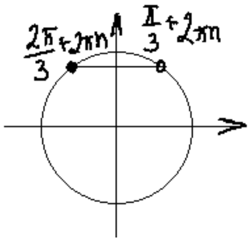
$$2\sin x - \sqrt{3} = 0$$

</td>
</tr>
</table>



$x = \pi n, \quad n \in Z$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



С учётом условия $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $\pi n; \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$

2) а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}} = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0$$

Левая часть уравнения представлена в виде дроби, следовательно знаменатель дроби не может обратиться в 0. $\sin x > 0$ *(как подлогарифмическое выражение). Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель нет.*

$\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x) = 0$

$\log_2(\sin x)$ вынесем за скобки как общий множитель

$(\log_2(\sin x))(\log_2(\sin x) + 1) = 0$

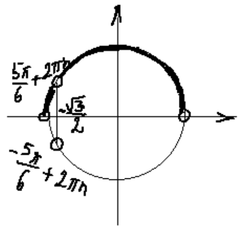
Каждый множитель приравняем к нулю

Условие:

$2\cos x + \sqrt{3} \neq 0$

$\cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

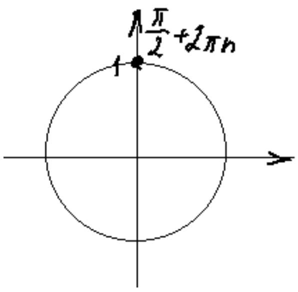
и $\sin x > 0$



$\log_2(\sin x) = 0$

$\log_2(\sin x) = \log_2 1$

$\sin x = 1$



Семейство корней подходит по условию

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

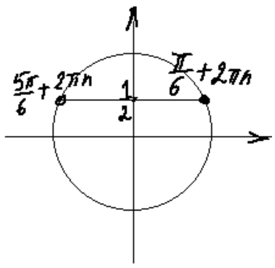
$\log_2(\sin x) + 1 = 0$

$\log_2(\sin x) = -1$

$\log_2(\sin x) = \log_2 2^{-1}$

$\log_2(\sin x) = \log_2 \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$



С учётом условия $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Ответ: $a) \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

3) а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

$$\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$$

Приводим углы к одинаковому виду x.

$cos\,2x = cos^2\,x - sin^2\,x;$ $\quad cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = sin\,x$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$

Приведём функции к одинаковому виду.

Заменим по основному тригонометрическому тождеству $cos^2\,x = 1 - sin^2\,x$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$$

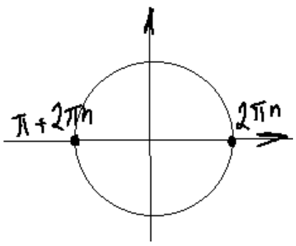
$$-2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0 \ / \ (-1)$$

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\sin x\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\sin x = 0$$

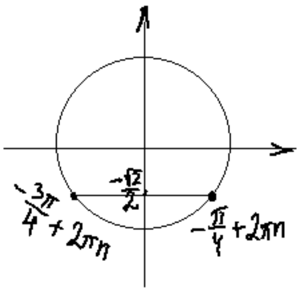


$x = \pi n,\ n \in Z$

$$2\sin x + \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin x = -\sqrt{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \epsilon Z$

Ответ: $a)\quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad \pi n, \quad n \in Z$

4) а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

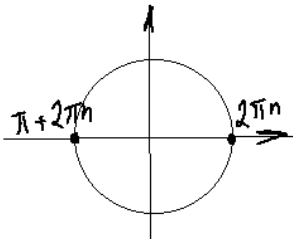
$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$$

Приводим углы к одинаковому виду x.

$$sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sin\,x\,cos\frac{\pi}{4} + cos\,x\,sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}sin\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}cos\,x$$

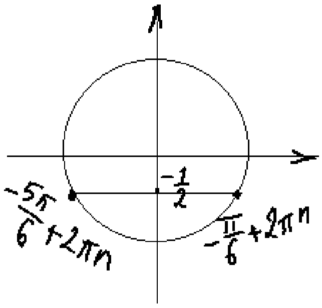
$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) - \cos x = 0$$
$$2\sin^2 x + \sin x + \cos x - \cos x = 0$$
$$2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$



$$x = \pi n,\ \ n \in Z$$

$$2\sin x + 1 = 0$$
$$2\sin x = -1$$
$$\sin x = -\frac{1}{2}$$



$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

Ответ: $a)\quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\quad \pi n,\ \ n \in Z$

5) а) Решите уравнение $\quad 2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

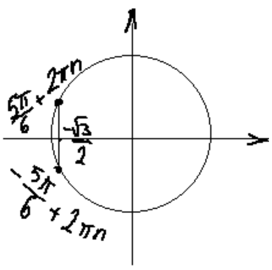
Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

Второй шаг решения выполнять не нужно, т.к. углы одинаковые.

Слагаемых четыре, разложим левую часть уравнения на множители с помощью метода группировки.

$$\cos^2 x\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) + \left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$
$$\left(2\cos x + \sqrt{3}\right)(\cos^2 x + 1) = 0$$

$$2\cos x + \sqrt{3} = 0$$
$$2\cos x = -\sqrt{3}$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



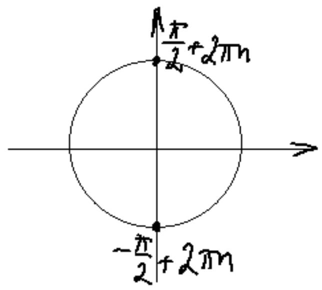
$$\cos^2 x + 1 = 0$$
$$\cos^2 x = -1$$
Корней нет

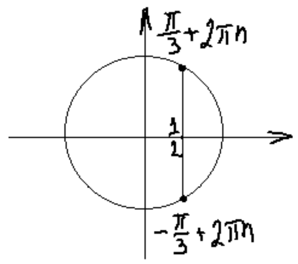
<table>
<tr><td>$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ: $a)$ $-\frac{5\Pi}{6} + 2\pi n;$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$</td></tr>
</table>

6) а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Первый шаг решения не применяем, т.к. никаких условий ставить не нужно.

<table>
<tr><td colspan="2">
$$2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) = 0$$
Приводим углы к одинаковому виду x с помощью формул приведения.
$sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -cos\, x$; $sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = cos^2\, x$; $cos(\pi - x) = -cos\, x$
$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$
$$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0$$
</td></tr>
<tr><td>
$$\cos x = 0$$


$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$
</td><td>
$$2\cos x - 1 = 0$$
$$2\cos x = 1$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$


$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n\epsilon\, Z$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ: $a)$ $\frac{\pi}{2} + \pi n;$ $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n\epsilon\, Z$</td></tr>
</table>

Подборка заданий на решение тригонометрических уравнений (для самостоятельного выполнения)

Решите уравнения:

1	$\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	*Ответ:* $2\pi n;$ $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$
2	$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$	*Ответ:* $2\pi n;$ $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

3	$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$	*Ответ:* $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n;$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} +$ $+2\pi n,\ n \in Z$
4	$\sin 2x = 2\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$	*Ответ:* $2\pi n;$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
5	$(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13\cos x} = 0$	*Ответ:* $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \epsilon Z$
6	$(2\sin x + 1)\sqrt{-\sin x - 1} = 0$	*Ответ:* $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z$
7	$\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}} = 0$	*Ответ:* $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ \ n \in Z$
8	$\frac{\left(tgx + \sqrt{3}\right) log_{13}(2\,sin^2 x)}{log_{47}\left(\sqrt{2}\,cos\,x\right)} = 0$	*Ответ:* $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \epsilon Z$

Способы отбора корней тригонометрического уравнения

Основные трудности у участников экзамена, приступивших к решению тригонометрического уравнения, возникают на этапе отбора корней: при верно решенном уравнении, либо неверно проводится отбор корней, либо не проводится вовсе.

К сожалению, пятая часть участников экзамена, верно решивших уравнение, ошибается в отборе корней. Способ отбора может быть любым: математически корректным и обоснованным как с помощью окружности, так и прямой или неравенств. Но в каждом из этих способов должны быть указаны ключевые элементы решения.

Рассмотрим различные способы отбора корней. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих способов.

Для осуществления отбора корней на заданном отрезке можно использовать разные способы. Наиболее распространённые: с помощью тригонометрической окружности, неравенства или используя графики тригонометрических функций.

Примеры заданий на отбор корней тригонометрического уравнения на заданном промежутке

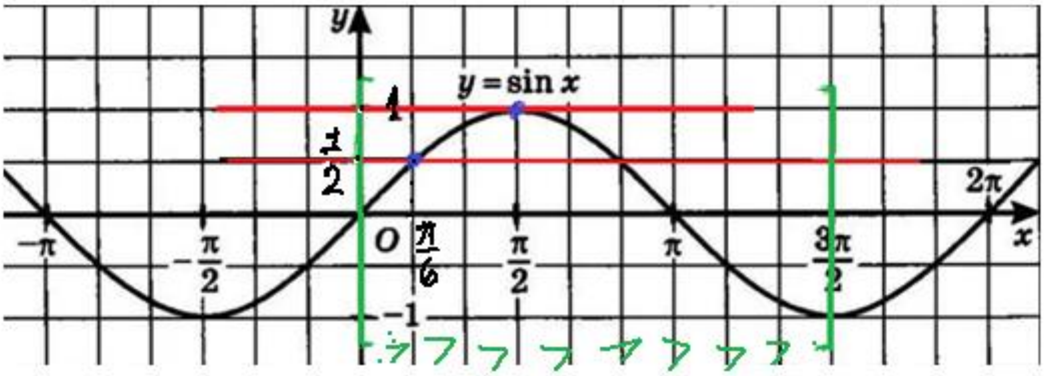
1) Отбор корней с помощью графика тригонометрической функции.

а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$ (решение пункта а) смотри на странице 38)

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: $a)\quad \frac{\pi}{6}+2\pi n;\quad \frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$

Построим график функции $y=\sin x$. По оси y найдём 1 и $\frac{1}{2}$, проведём прямые y = 1 и y = $\frac{1}{2}$. Выделим отрезок $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ по оси x**.** Найдём точки пересечения прямых y = 1 и y = $\frac{1}{2}$ с графиком функции $y=\sin x$, лежащие на заданном отрезке. Выпишем их абсциссы.



Ответ: б) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$

Способ обора корней тригонометрического уравнения на заданном отрезке с использованием графиков тригонометрических функций имеет ряд «минусов»:

- заданный для отбора корней отрезок может быть сильно сдвинут влево или вправо;
- исходное тригонометрическое уравнение может разбиться на несколько простейших тригонометрических уравнений относительно разных функций, а это потребует построения сразу нескольких графиков;
- решения простейших тригонометрических уравнений могут быть записаны через arcsin, arccos, arctg.

2) Отбор корней с помощью неравенства.

а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$ (решение пункта а) смотри на странице 39)

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$

Ответ: $a)\quad -\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\quad -\frac{\pi}{4}+2\pi n;\quad \pi n,\ \ n\in Z.$

С каждым семейством корней составим двойное неравенство.

<table>
<tr><td>$\frac{3\pi}{2}\le-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le 3\pi$</td><td>$\frac{3\pi}{2}\le-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le 3\pi$</td><td>$\frac{3\pi}{2}\le \pi n\le 3\pi$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Разделим каждое неравенство на π</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{2}\le-\frac{3}{4}+2n\le 3$</td><td>$\frac{3}{2}\le-\frac{1}{4}+2n\le 3$</td><td>$\frac{3}{2}\le n\le 3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Слагаемое с n оставим внутри двойного неравенства, числовое слагаемое перенесём в обе части каждого неравенства, поменяв знак.</td><td>На отрезке от $\frac{3}{2}$ до 3 лежит два целых числа
$n=2;\quad n=3$</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\le 2n\le 3+\frac{3}{4}$

$\frac{9}{4}\le 2n\le\frac{15}{4}$</td><td>$\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\le 2n\le 3+\frac{1}{4}$

$\frac{7}{4}\le 2n\le\frac{13}{4}$</td><td>При $n=2\quad x=2\pi$
При $n=3\quad x=3\pi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чтобы получить границы значений для n разделим каждое неравенство на 2</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\frac{9}{8}\le n\le\frac{15}{8}$
На отрезке
от $\frac{9}{8}$ до $\frac{15}{8}$ нет
целых значений n

$n=\emptyset$</td><td>$\frac{7}{8}\le n\le\frac{13}{8}$
На отрезке
от $\frac{7}{8}$ до $\frac{13}{8}$ лежит
целое число 1
$n=1$
При $n=1\ \ x=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответ: б) $\frac{7\pi}{4};\quad 2\pi;\quad 3\pi$</td></tr>
</table>

Способ отбора корней с помощью неравенства очень удобен и алгоритмизирован. Но его не применить, если решения простейших тригонометрических уравнений могут быть записаны через arcsin, arccos, arctg.

3) Отбор корней тригонометрического уравнения с помощью окружности.

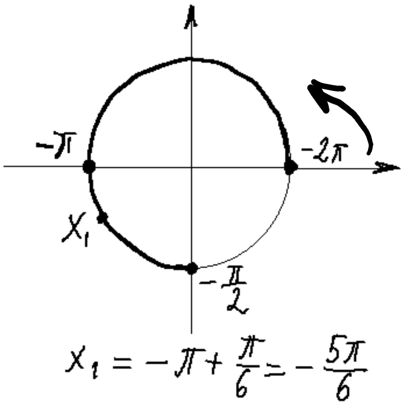
Самый универсальный способ. Ключевые моменты при его использовании:

- чётко указанные начало и конец дуги окружности, соответствующей заданному отрезку;
- выделенная любым способом дуга, на которой производится отбор корней;
- чётко подписанные и желательно высчитанные корни, принадлежащие заданному в условии отрезку

а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$ (решение пункта а) смотри на странице 39)

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\boldsymbol{\pi}; -\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\right]$

Ответ: $а)\quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad \pi n, \quad n \in Z.$



Отберём корни с помощью единичной окружности.

Ответ: б) $-2\pi; \quad -\pi; \quad -\frac{5\pi}{6}$

Подборка заданий на отбор корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке (для самостоятельного выполнения)

В решённых в предыдущем пункте уравнениях, выполните отбор корней, принадлежащих заданному промежутку:

1) $\boldsymbol{\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ *Ответ: а)* $2\pi n; \quad \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $[-2\boldsymbol{\pi}; -\boldsymbol{\pi}]$ *Ответ: б)* $-2\pi; \quad -\frac{4\pi}{3}$

2) $\boldsymbol{\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0}$ *Ответ: а)* $2\pi n; \quad \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[-4\boldsymbol{\pi}; -\frac{5\boldsymbol{\pi}}{2}\right]$ *Ответ: б)* $-4\pi; \quad -\frac{11\pi}{3}$

3) $\mathbf{2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3}$ *Ответ: а)* $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n;$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n;\quad \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ *Ответ:* $-\frac{3\pi}{4};\quad -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

4) $\mathbf{\sin 2x = 2\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1}$

Ответ: а) $2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ *Ответ: б)* $-4\pi;\quad -\frac{17\pi}{6}$

5) $\mathbf{(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13\cos x} = 0}$ *Ответ: а)* $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\quad n \epsilon Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[-3\pi; -\frac{3\Pi}{2}\right]$ *Ответ: б)* $-\frac{9\Pi}{4};\quad -\frac{7\pi}{4}$

6) $\mathbf{(2\sin x + 1)\sqrt{-\sin x - 1} = 0}$ *Ответ: а)* $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[0; \frac{3\Pi}{2}\right]$ *Ответ: б)* $\frac{4\pi}{3};\quad \frac{3\pi}{2}$

7) $\mathbf{\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}} = 0}$ *Ответ: а)* $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\quad n \in Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ *Ответ: б)* $\frac{13\pi}{6}$

8) $\mathbf{\frac{(tgx + \sqrt{3})\, log_{13}(2\sin^2 x)}{log_{47}(\sqrt{2}\cos x)} = 0}$ *Ответ: а)* $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \epsilon Z$

б) **Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу** $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *Ответ: б)* $-\frac{\pi}{3}$

Полноценно подготовиться к экзамену можно, лишь изучая математику во всём разнообразии её методов; необходимо уделять должное внимание развитию логики. В этом могут помочь открытый банк ФИПИ, сборники задач и вариантов, если их использовать как источник идей и для проверки собственных достижений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир и др. – Москва : Вентана-Граф, 2022.
2. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс (углубленный уровень) / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир и др. – Москва : Вентана-Граф, 2020.
3. И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, Е. А. Коновалов: ЕГЭ-2024. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов. – Национальное образование, 2024.
4. Малкова, А. Г. Математика : авторский курс подготовки к ЕГЭ / А. Г. Малкова. – 4-е изд. – Ростов на Дону : Феникс, 2019. – 540, [1] с. : ил. – (Авторский курс).

ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРЫ

1. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ». – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/.
2. Образовательный сайт для подготовки к экзаменам. – URL: www.alexlarin.net.
3. Федеральный институт педагогических измерений. – URL: www.fipi.ru.
4. Решу ЕГЭ. – URL: www.ege.sdamgia.ru.
5. Проверка знаний в он-лайн тестировании. – URL: www.academyege.ru.